Методички по электроду посвящаются Андрею Олеговичу Шишанину
Лучшему семинаристу по электроду

Семинарист: В индийской культуре есть три стихии: Невежество – трамос, страсть – размос, благость – сатва. (названия на русском и на санскрите). У каждой стихии есть своё время суток. У благости время утром до десяти часов утра. Так что вставайте пораньше, часов в четыре-пять.

Автор выражает благодарность студентам 4 курса Сиваковой Екатерине и Шарофееву Андрею за предоставленные материалы.

Задача 1:

2. Диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 1 + \alpha\tau^2$ помещен в цилиндрический конденсатор, образованный двумя проводящими цилиндрами радиусов a и $\frac{3}{2}a$, оси которых совпадают. Заряды единицы длины цилиндров κ и $-\kappa$, соответственно. Определить силу, действующую на единицу объема диэлектрика.

Картинка: 

Для силы есть объёмной плотности есть формула:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\vec{\nabla}\varepsilon + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$$

Сначала надо избавиться от производной *∂ε/∂τ,* благо что в условии дана явная зависимость ε от τ:

$$\vec{f} = \rho\vec{E} - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\vec{\nabla}\varepsilon + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{E}^2}{8\pi}\,2\alpha\tau\cdot\tau\right)$$

Градиент ε равен нулю (диэлектрик однороден). Объёмной плотности зарядов также нет, так что будет только третье слагаемое:

$$\vec{f} = \frac{\alpha\tau^2}{4\pi}\,\mathrm{grad}\,\vec{E}^2$$

E не является константой, потому что зависит от r. Осталось найти это поле E. Ну, это уже общефиз ☺ Помните, как цилиндрический конденсатор считается?
Поток D через площадь равен заряду внутри.
Заряд внутри равен к*dh, площадь – dh*2πr. Отсюда D(r)=к/(2πr), E(r)= к/(2πrε).
Теперь надо вычислить градиент от $E^2(r)=\kappa^2/(4\pi^2\varepsilon^2)*1/r^2$. Ищем градиент в цилиндрической СК:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Производные по φ и z будут 0 в силу симметрии, останется производная по r. Будет | grad $E^2(r)|=\kappa^2/(4\pi^2\varepsilon^2)*1/r$.

Осталось домножить на $\frac{\alpha\tau^2}{4\pi}$, чтобы получить ответ: $\vec{f} = \frac{\alpha\tau^2}{4\pi} \cdot \frac{\kappa^2}{4\pi^2\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{r^2}$.

Задача. Диэлектрический шар с диэлектрической проницаемостью ε и радиусом 2R имеет полость радиусом R. Он помещён в однородное электрическое поле E. Найти потенциал во всех точках пространства.

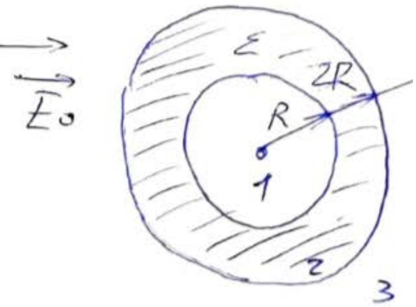
Решаем:

$$\vec{E}_0 = -\nabla\varphi_\infty = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta)$$

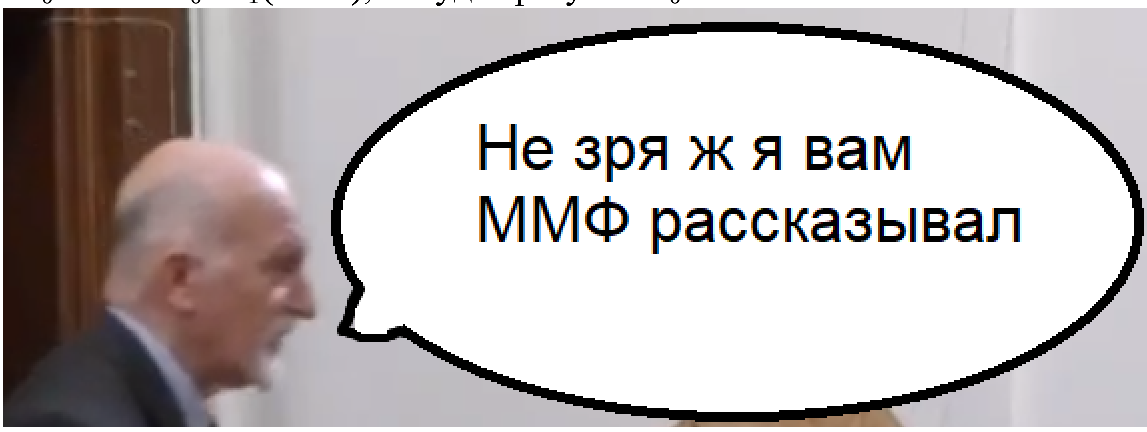
$$\varphi_1 = \alpha r P_1(\cos(\theta))$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{\beta}{r^2} + \gamma r\right) P_1(\cos(\theta))$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{\delta}{r^2} + \lambda r\right) P_1(\cos(\theta))$$



Кратенько пояснение, почему ищем потенциал именно в таком виде (подразумевается, что читатель уже решал подобные задачи, например, 22.2): решаем $\Delta\varphi=0$ в сферической СК, там будет сумма по m,n $(Ar^n+B/r^{n+1})*Y_{nm}(\varphi,\theta)$, но в силу симметрии по φ очевидно, что в качестве $Y_{nm}(\varphi,\theta)$ нам годятся только случай m=0, т.е. $P_n(\cos\theta)$, а в силу ГУ надо взять $P_1(\cos\theta)$, т.е. n=1, поэтому множитель с r имеет именно такой вид. Ну и в φ_1 не может быть слагаемого $1/r^2$, потому что в той области r может к нулю стремиться. В φ_3 при r->бесконечности потенциал должен стремиться к $-E_0r\cos\theta=E_0r P_1(\cos\theta)$, откуда сразу $\lambda=-E_0r$.



Пишем ГУ: потенциал непрерывен, непрерывна также нормальная составляющая D:

$$
\begin{cases}
\varphi_3 = \varphi_2 \big|_{r=2R}; \\
\varphi_2 = \varphi_1 \big|_{r=R} \\
D^n_3 = D^n_2 \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial r} = \varepsilon \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=2R}; \\
D^n_1 = D^n_2 \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial r}\Big|_{r=R};
\end{cases}
$$

Подставляем явный вид φ_1, φ_2, φ_3:

$$
\begin{cases}
-E_0 2R + \dfrac{\delta}{4R^2} = \dfrac{\beta}{4R^2} + 2\gamma R \\
\dfrac{\beta}{R^2} + \gamma R = \alpha R \\
-E_0 - \dfrac{\delta}{(2R)^3} = \varepsilon\left(\dfrac{-\beta}{(2R)^3} + \gamma\right) \\
\varepsilon\left(-\dfrac{\beta}{R^3} + \gamma\right) = \alpha
\end{cases}
$$

Четыре уравнения, четыре неизвестных,
Найдём же их:

$$\delta = \frac{56R^3E_0(\varepsilon^2-1)}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7} \qquad \gamma = -\frac{16E_0(1+\varepsilon)}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7}$$

$$\beta = \frac{16E_0R^3(\varepsilon-1)}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7} \qquad \alpha = -\frac{32E_0\varepsilon}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7}$$

Ответ:

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{32\varepsilon E_0}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7}\, r\cos\theta \\[2ex] \varphi_2 = 16E_0\cos\theta\left(-\dfrac{(\varepsilon-1)R^3}{(7\varepsilon^2+18\varepsilon+7)r^2} - \dfrac{(1+\varepsilon)r}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7}\right) \\[2ex] \varphi_3 = \left(-E_0 r + \dfrac{56E_0(\varepsilon^2-1)R^3}{7\varepsilon^2+18\varepsilon+7}\,\dfrac{1}{r^2}\right)\cos\theta . \end{cases}$$

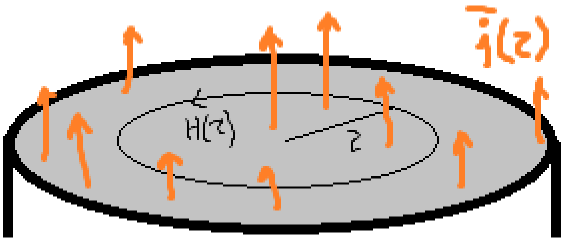
Задача:

Дан цилиндрический провод радиусом R, по котором протекает ток, но не однородный, а $j=j_0(1-3\alpha r/R^3)$. При каком-то r оказалось, что H на расстоянии r и $2R^2/r$ будут совпадать. А что за это r?

Решение:

Тупая задача уровня общефиза. Пользуемся теоремой: циркуляция H = 4π/c * потоку тока через площадь:

,



Пусть r<R, тогда

$$H(r)\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\int_0^r j(r')\underbrace{dS}_{2\pi r'\,dr'} = \frac{4\pi}{c} j_0\cdot 2\pi \int_0^r \left(r' - \frac{3\alpha r'^2}{R^3}\right)dr' = \frac{8\pi^2 j_0}{c}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{\alpha r^3}{R^3}\right)$$

Выражаем H(r):

$$H(r) = \frac{4\pi j_0}{c}\left(r - \frac{\alpha r^2}{R^3}\right)$$

Пусть r>R, тогда

$$H(r)\cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\int_0^R j(r')\underbrace{dS}_{2\pi r'\,dr'} = \frac{4\pi}{c} j_0\cdot 2\pi \int_0^R \left(r' - \frac{3\alpha r'^2}{R^3}\right)dr' = \frac{8\pi^2 j_0}{c}\left(\frac{R^2}{2} - \frac{\alpha \cancel{R^3}}{\cancel{R^3}}\right)$$

Выражаем H(r):

$$H(r) = \frac{4\pi j_0}{rc}\left(R^2 - \alpha\right)$$

Нам нужно, чтобы $H(r)=H(2R^2/r)$, т.е если в первую формулу для $H(r)$ мы подставим $2R^2/r$, то должны получить то же, что во второй. Проверяем:

$$\frac{4\pi j_0}{c}\left(\frac{2R^2}{r} - \frac{\alpha\left(2\frac{R^2}{r}\right)^2}{R^3}\right) = \frac{4\pi j_0}{2c}\left(R^2 - \alpha\right)$$

$$2\frac{R^2}{r} - 4\frac{\alpha R}{r^2} = \frac{1}{r}(R^2 - \alpha) \Rightarrow \frac{R^2+\alpha}{r} - 4\frac{\alpha R}{r^2} = 0 \Rightarrow (R^2+\alpha)r = 4\alpha R \Rightarrow r = \frac{4\alpha R}{R^2+\alpha}$$

Ответ получен.